OLIMPIADA DE MATEMATICA
FAZA LOCALA
18.02.2012
Clasa a IX-a

Subiectul I

Arătați că $\sum_{k=1}^{2012} \frac{2k+1}{\sqrt{k\cdot(k+1)}} > 4024$

***

Subiectul II

Să se determine : $S = \left[\sum_{k=1}^{2012} \frac{1}{k^2}\right]$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a.

***

Subiectul III

Pe laturile $[AB]$ şi $[AC]$ ale triunghiului ABC se consideră punctele D, respectiv E, astfel încât $\frac{AD}{AB} = \frac{3}{4}$, $\frac{AE}{AC} = \frac{2}{3}$. Pe dreptele BE, respectiv CD se consideră punctele E_1 şi D_1 astfel încât $\overrightarrow{EE_1} = 3\overrightarrow{BE}$ şi $\overrightarrow{DD_1} = 2\overrightarrow{CD}$. Să se demonstreze că punctele E_1, A şi D_1 sunt coliniare.

***

Subiectul IV

În triunghiul ABC fie I centrul cercului înscris în triunghi, G centrul de greutate, $AB = c$, $BC = a, CA = b$.

a) Demonstrați, că pentru orice punct P din planul triunghiului are loc relația

$$\overrightarrow{PI} = \frac{1}{a+b+c}\cdot\left(a\cdot\overrightarrow{PA} + b\cdot\overrightarrow{PB} + c\cdot\overrightarrow{PC}\right)$$

b) Exprimați $\overrightarrow{IG}$ în funcție de vectorii $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AC}$.

c) În ce condiții vor fi IG şi AC paralele?

***

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect se evaluează cu 7 puncte.
Timp de lucru 3 ore.

Probleme propuse şi selectate de prof. Blaga Cornel, prof. Simon János